

一种基于 GNC 和增广拉格朗日对偶的 非凸非光滑图像恢复方法

刘晓光,高兴宝

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710062)

摘要: 逐步非凸方法(GNC)和增广拉格朗日对偶在非凸非光滑图像恢复中有较高的恢复性能.然而分别使用这两种方法时 GNC 不能够保证全局收敛,增广拉格朗日对偶不能获得有效的初始值.为克服上述缺陷,本文通过转换原始问题为等式约束优化问题推出了一种基于 GNC 和增广拉格朗日对偶的组合图像恢复方法,并对其收敛性严格证明.该方法不仅可以获得有效的初始值,同时不要求问题具有凸性和光滑性.更多地,一个自适应能量函数通过对偶迭代而得到.实验结果表明推出的方法可以有效地提高图像恢复质量和算法效率.

关键词: 非凸非光滑; 惩罚函数; 增广拉格朗日对偶; 逐步非凸方法; 图像恢复

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)02-0264-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.02.009

A Method Based on the GNC and Augmented Lagrangian Duality for Nonconvex Nonsmooth Image Restoration

LIU Xiao-guang, GAO Xing-bao

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062, China)

Abstract: The graduated nonconvex method(GNC) and augmented Lagrangian duality have superior restoration performance for nonconvex nonsmooth image restoration. However, the global convergence of the general GNC could not be guaranteed and an effective initial value could not be obtained for the augmented Lagrangian duality when they are used separately. To overcome these drawbacks, we propose a hybrid method based on the GNC and augmented Lagrangian duality by transforming the original problem into equality constrained optimization, then its dual convergence has been strictly proven. The proposed method could get an effective initial value and does not require the convexity and smoothness of the underlying problem. Moreover, an adaptive energy function is generated by the dual iterations. Experimental results show that the proposed method could enhance the quality of restored images and the efficiency of algorithm effectively.

Key words: nonconvex nonsmooth; potential function; augmented Lagrangian duality; graduated nonconvex method(GNC); image restoration

1 引言

数字图像恢复广泛应用于军事、医学等高科技领域^[1].一般地,原始图像 $\hat{f} \in F$ ($F \subset R^l$ 为紧集)和观测图像 $g \in R^q$ 的关系为:

$$g = A\hat{f} - b \quad (1)$$

其中 $A \in R^{q \times l}$ 代表由运动模糊、辐射失真等原因引起的退化系统, $l = l_1 \times l_2$, l_1 和 l_2 分别是图像表达为矩阵时的行数和列数, $b \in R^q$ 为加性噪声.

图像恢复通常利用退化系统 A , 观测图像 g , 加性噪声 b 的某些信息去寻找原始图像 \hat{f} 的理想估计 f^* . 然而由于 A 的强稀疏性, 仅利用模型式(1)的逆过程求解往往为病态问题. 因此利用原始图像的先验信息和式(1)来定义正则化解成为了最有效的方法之一, 即 f^* 为如下能量函数的一个最小值点:

$$J(f) = \theta(Af - g) + \alpha\Phi(f) \quad (2)$$

其中函数 $\theta: R^q \rightarrow R$ 表示向量 Af 与 g 的数据差的某种度量, 正则项 Φ 表示 f 的某些先验信息, 正则参数 $\alpha > 0$

用来均衡以上两项.

本文中,我们利用 $\Phi(\mathbf{g})$ 估计 $\Phi(\mathbf{f}^*)$, 即令 $\Phi(\mathbf{f}^*) = \beta\Phi(\mathbf{g})$ (假设 $l_1 = l_2$, 推出的方法易推广至 $l_1 \neq l_2$ 情形), 于是式(2)转化为如下等式约束优化问题:

$$(P) \begin{cases} \min_{\mathbf{f} \in F} \theta(\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}) \\ \text{s.t. } \Phi(\mathbf{f}) = \beta\Phi(\mathbf{g}) \end{cases} \quad (3)$$

其中参数 $\beta > 0$ 用来平衡 $\Phi(\mathbf{g})$ 和 $\Phi(\mathbf{f})$, 可根据不同的噪声及污染设定. 类似地, β 和 $\Phi(\mathbf{f})$ 分别称为正则参数和正则项.

一般地, $\theta(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$, 正则项 $\Phi(\mathbf{f}) = \sum_{i \in I} \varphi(\|\mathbf{D}\mathbf{f}\|_2)$, 其中集合 $I = \{1, 2, \dots, l\}$, $\varphi: R \rightarrow R_+ = \{t \in R, t \geq 0\}$ 为连续惩罚函数, 矩阵 $\mathbf{D}_i \in R^{p \times l}$ 为差分算子, 用来产生第 i 个像素点和其 p 个相邻像素点的差分向量. 我们令 $p = 2$, 则 $\mathbf{D}_i = [\mathbf{D}_i^1; \mathbf{D}_i^2]$, 其中

$$\begin{cases} i \in I_1 = \{l_2, 2l_2, \dots, l_1 l_2\} \Rightarrow \mathbf{D}_i^1[j] = 0, \\ \quad \forall j = 1, \dots, l \\ i \notin I_1 \Rightarrow \mathbf{D}_i^1[i] = -1, \mathbf{D}_i^1[i+1] = 1 \text{ 且} \\ \quad \forall j \notin \{i, i+1\}, \text{ 有 } \mathbf{D}_i^1[j] = 0 \\ i \in I_2 = \{(l_1 - 1)l_2 + 1, (l_1 - 1)l_2 + 2, \dots, l_1 l_2\} \\ \quad \Rightarrow \mathbf{D}_i^2[j] = 0, \forall j = 1, \dots, l \\ i \notin I_2 \Rightarrow \mathbf{D}_i^2[i] = -1, \mathbf{D}_i^2[i+l_2] = 1 \text{ 且} \\ \quad \forall j \notin \{i, i+l_2\}, \text{ 有 } \mathbf{D}_i^2[j] = 0 \end{cases}$$

众所周知, 惩罚函数 φ 在图像恢复中扮演着重要角色, 得到了广泛关注^[2~9]. 对于边界整齐的图像, 理论和实验结果表明非凸非光滑惩罚函数:

$$\frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, \log(\lambda t + 1), t^\lambda (\lambda \in (0, 1))$$

等有较高的恢复性能, 但其不可微性引起了许多数值计算困难^[5,6], 因此 GNC 被广泛用来处理此类问题^[7~9]. 为获得有效初始值, 该方法采用一序列的非凸非光滑近似惩罚函数 φ_{ε_n} 逐步逼近 $\varphi(0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n = 1, \varphi_{\varepsilon_n} = \varphi)$, 获得了较好的恢复效果. 其中, 文献[9]分别以拟合 \mathbf{f} 和 $\mathbf{D}\mathbf{f}$ 为基础推出了两种相关方法, 实验结果表明其有较高的恢复性能, 然而理论上不能够保证全局收敛.

另一方面, 在处理非凸非光滑问题中增广拉格朗日对偶表现出了优良的性能^[10~12]. 不足之处为尽管理论表明零对偶间隙成立时, 利用对偶问题可求解相应原始优化问题的精确解, 但实际上存在较多数值计算困难, 特别是对于非凸非光滑问题.

鉴于此, 本文推出了一种基于 GNC 和增广拉格朗日对偶的组合图像恢复方法并对其收敛性进行严格证明. 该方法不仅可以得到有效的初始值, 同时不要求问题具有凸性和光滑性. 更多地, 一个自适应能量函数通

过对偶迭代而得到. 数值实验分别以拟合 \mathbf{f} 和 $\mathbf{D}\mathbf{f}$ 为例, 说明了该方法的恢复性能.

2 预备知识

本节我们首先介绍基本增广拉格朗日对偶, 其次给出求解式(3)的具体对偶方法及相关性质. 特别地, 下面仅以拟合 \mathbf{f} 的情形为例具体介绍推出的方法, 为更加有效地表明方法的性能, 拟合 $\mathbf{D}\mathbf{f}$ 情形的实验结果将在 5.2 中给出. 记: $R_+^* = \{t \in R \mid t > 0\}$, $R^+ = \{t \in R \mid t \neq 0\}$, $\text{Her}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in R^l \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

一般地, 问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{f} \in F} \varphi(\mathbf{f}) \\ \text{s.t. } \bar{\varphi}(\mathbf{f}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

增广拉格朗日式 L 为:

$$L(\mathbf{f}, c, \mathbf{e}) = \varphi(\mathbf{f}) + c\sigma(\bar{\varphi}(\mathbf{f})) - \langle \bar{\varphi}(\mathbf{f}), \mathbf{e} \rangle \quad (5)$$

其中 $\varphi, \bar{\varphi}, \sigma$ 为连续函数, σ 满足: $\min \sigma = 0, \sigma \geq 0, \text{argmin} \sigma = 0$. 参数 $c \geq 0$ 为惩罚乘子, 向量 \mathbf{e} 为对偶变量, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积. 基于式(5), 定义如下对偶函数:

$$H(c, \mathbf{e}) = \min_{\mathbf{f} \in F} L(\mathbf{f}, c, \mathbf{e}).$$

于是式(4)的对偶问题为:

$$(D) \max_{(c, \mathbf{e})} H(c, \mathbf{e})$$

次梯度等许多方法可有效求解该凹优化问题^[5,13~15]. 那么, 若已知对偶迭代

$$(c^m, \mathbf{e}^m) = (c^{m-1}, \mathbf{e}^{m-1}) + t^{m-1} \mathbf{d}^{m-1} \quad (6)$$

则

$$\mathbf{f}^m \in \arg \min_{\mathbf{f} \in F} L(\mathbf{f}, c^m, \mathbf{e}^m)$$

其中 t^{m-1} 为步长, \mathbf{d}^{m-1} 为 H 在点 $(c^{m-1}, \mathbf{e}^{m-1})$ 的次梯度方向(见第 4 部分).

针对图像恢复问题式(3), 令 $\sigma(t) = |t|$, 式(5)转化为:

$$L(\mathbf{f}, c, \mathbf{e}) = \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + c|\Phi(\mathbf{f}) - \beta\Phi(\mathbf{g})| - \langle \Phi(\mathbf{f}) - \beta\Phi(\mathbf{g}), \mathbf{e} \rangle,$$

具体求解方法如上所述. 特别地, 此时 e 为实数, 有益于计算.

引理 1^[5] (1) $\min(P) \geq \max(D)$; (2) 假设 (P) 中 $\Phi(\mathbf{f})$ 连续, 集合 F 是紧集且可行解存在, 则 $\min(P) = \max(D)$ 且 $\min(P)$ 的解存在.

引理 2^[10] 假设 $\min(P) = \max(D)$, 若 (c^m, \mathbf{e}^m) 和 $\bar{\mathbf{f}} \in F$ 满足:

$$\min_{\mathbf{f} \in F} L(\mathbf{f}, c^m, \mathbf{e}^m) = \|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{g}\|_2^2 + c^m|\Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \beta\Phi(\mathbf{g})| - \langle \Phi(\bar{\mathbf{f}}) - \beta\Phi(\mathbf{g}), \mathbf{e}^m \rangle,$$

则 $\Phi(\bar{\mathbf{f}}) = \beta\Phi(\mathbf{g})$ 当且仅当 $\bar{\mathbf{f}}, (c^m, \mathbf{e}^m)$ 分别为 $\min(P)$ 和 $\max(D)$ 的解.

引理 3^[10] 令 F 为非空紧集, $S(c^m, e^m)$ 为 $\min_{f \in F} \{ \| \mathbf{A}f - \mathbf{g} \|_2^2 + c^m | \Phi(f) - \beta \Phi(\mathbf{g}) | - \langle \Phi(f) - \beta \Phi(\mathbf{g}), e^m \rangle \}$ 的解集. 若 $\Phi(f)$ 连续且对于 $\forall (c^m, e^m)$ 有 $S(c^m, e^m) \neq \emptyset$, 则当 $f^m \in S(c^m, e^m)$ 时 $s^m = (| \Phi(f^m) - \beta \Phi(\mathbf{g}) |, \beta \Phi(\mathbf{g}) - \Phi(f^m))$ 为 H 在点 (c^m, e^m) 的次梯度.

引理 4^[9] 若惩罚函数 φ 和近似惩罚函数 φ_{ε_k} 满足:

(1) $\ker(\mathbf{A}) \cap \ker(\mathbf{D}) = \{0\}$, 其中 $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1^T, \dots, \mathbf{D}_l^T]^T$.

(2) $\varphi(t)$ 在 R 上连续对称, 在 R_+ 上单调递增, $\varphi(0) = 0, \varphi'(0^+) > 0$.

(3) $M = \{t \in R^+ : \varphi'(t^-) > \varphi'(t^+) \text{ 且 } -\infty < \varphi''(t^-) < \varphi''(t^+) \leq 0\}$ 为一个有限点集(可为 \emptyset), 且 $\varphi(t) \in C^2(R_+^* / M)$.

(4) $\varphi''(0^+) < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi''(t) = 0$, 在集合 R_+^* / M 上 $\varphi''(t)$ 单调递增且 $\varphi''(t) \leq 0$.

(5) $\varphi'(0^+) > 0$ 及 $\varphi''(t^+) < 0$ 有界, $\varphi_{\varepsilon_0}(t) = \varphi'(0^+) |t|$.

(6) $\forall \varepsilon_k \in [0, 1], \varphi_{\varepsilon_k}(t)$ 在 R 上连续对称, $\varphi_{\varepsilon_k}(t) \in C^2(R_+^*), \varphi_{\varepsilon_k}(0) = 0, \varphi'_{\varepsilon_k}(0^+) > 0$ 和 $\varphi''_{\varepsilon_k}(0^+) < 0$ 有界, 在集合 R^+ 上 $\varphi''_{\varepsilon_k}(t) < 0$.

则函数 $\phi_{\varepsilon_k}(t) = \varphi_{\varepsilon_k}(t) - \varphi'_{\varepsilon_k}(0^+) |t|$ 满足:

(a) $\phi_{\varepsilon_0}(t) = 0$, 在集合 R 上 $\phi_{\varepsilon_1}(t) = \varphi(t) - \varphi'(0^+) |t|$;

(b) $\forall \varepsilon_k \in [0, 1], \phi'_{\varepsilon_k}(0) = 0, \phi'_{\varepsilon_k}(t) \in C^2$, 在集合 R 上 $\phi''_{\varepsilon_k}(-t) = \phi''_{\varepsilon_k}(t) < 0$.

3 算法

针对问题式(3), 由引理 1 易知零对偶间隙成立. 这一部分我们推出一个基于 GNC 和增广拉格朗日对偶的组合图像恢复算法. 第 5 部分中数值实验将说明该方法的有效性.

首先令 L 由函数序列 $L_{\varepsilon_k}(f, c, e)$:

$$\| \mathbf{A}f - \mathbf{g} \|_2^2 + c | \Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) | - \langle \Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}), e \rangle,$$

逐步逼近, 其中 $\Phi_{\varepsilon_k}(f) = \sum_{i \in I} \varphi_{\varepsilon_k}(\| \mathbf{D}f \|_2)$, φ_{ε_k} 为非凸非光滑函数. 假设 φ_{ε_k} 满足引理 4, 且令 $\alpha_{\varepsilon_k} = \varphi'_{\varepsilon_k}(0^+)$, $\varphi_{\varepsilon_k} = \phi_{\varepsilon_k}(t) + \alpha_{\varepsilon_k} |t|$, 由文献[9]可得

$$L_{\varepsilon_k}(f, c, e) = \| \mathbf{A}f - \mathbf{g} \|_2^2 - \begin{cases} (e - c) \left[\Psi_{\varepsilon_k}(f) + \alpha_{\varepsilon_k} \sum_{i \in I} \| \mathbf{D}f \|_2 - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \right], & \text{若 } \Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \geq 0 \\ (c + e) \left[\Psi_{\varepsilon_k}(f) + \alpha_{\varepsilon_k} \sum_{i \in I} \| \mathbf{D}f \|_2 - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \right], & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Psi_{\varepsilon_k}(f) = \sum_{i \in I} \phi_{\varepsilon_k}(\| \mathbf{D}f \|_2)$. 由于为 \mathbf{D}_i 离散梯度算子, $\sum_{i \in I} \| \mathbf{D}f \|_2$ 等价于总变分正则, 记其为 $TV(f)$.

针对式(7), 引进辅助变量 $u \in R^l$ 从不可微项中转换变量 f ^[9], 加权拟合项 $\omega \| f - u \|_2^2$ 用来控制 f 和 u 的接近程度, $\omega > 0$. 于是式(7)变为:

$$\hat{L}_{\varepsilon_k}(f, u, c, e) = \| \mathbf{A}f - \mathbf{g} \|_2^2 + \omega \| f - u \|_2^2 - \begin{cases} (e - c) \left[\Psi_{\varepsilon_k}(f) + \alpha_{\varepsilon_k} TV(u) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \right], & \text{若 } \Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \geq 0 \\ (c + e) \left[\Psi_{\varepsilon_k}(f) + \alpha_{\varepsilon_k} TV(u) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \right], & \text{其它} \end{cases} \quad (8)$$

求解式(8)方法如下:

(1) 当 f 确定时, 该问题为标准 TV 去噪问题, 即:

$$u^{(m, \varepsilon_k)} = \arg \min_{u \in F} \hat{L}_{\varepsilon_k}(f^{(m-1, \varepsilon_k)}, u, c^{(m, \varepsilon_k)}, e^{(m, \varepsilon_k)}).$$

许多去噪方法^[16,17] 可用来求解. 类似文献[9], 本文采用 Chambolle 投影算法^[17].

(2) 当 u 确定时, 式(7)为如下标准去模糊问题:

$$f^{(m, \varepsilon_k)} = \arg \min_{f \in F} \hat{L}_{\varepsilon_k}(f, u^{(m, \varepsilon_k)}, c^{(m, \varepsilon_k)}, e^{(m, \varepsilon_k)}).$$

由于 f 未知, $\Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g})$ 的正负不易确定. 然而 u^m 与 f^m 有较高的相似度, 因此本文利用 u^m 替代 f^m 判断 $\Phi_{\varepsilon_k}(f) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g})$ 的正负, 第 5 部分的实验结果说明了可行性. 此时目标函数 $L(\cdot, u^{(m, \varepsilon_k)}, c^{(m, \varepsilon_k)}, e^{(m, \varepsilon_k)})$ 为二次可微函数, 许多基于梯度的方法可用来求解^[5,13]. 为保持一致性, 类似文献[9]我们利用拟牛顿法求解, 具体如下:

若 $\varepsilon_k = 0$, 求解

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \omega I) f^{(m, \varepsilon_k)} = \mathbf{A}^T \mathbf{g} + \omega u^{(m, \varepsilon_k)},$$

若 $\varepsilon_k \neq 0$, 求解

$$(2\mathbf{A}^T \mathbf{A} + 2\omega I) \Delta f^{(m-1, \varepsilon_k)} = -\nabla f_{\varepsilon_k},$$

同时令 $f^{(m, \varepsilon_k)} = f^{(m-1, \varepsilon_k)} + \tau \Delta f^{(m-1, \varepsilon_k)}$, 其中

$$\nabla f_{\varepsilon_k} = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A} f^{(m-1, \varepsilon_k)} - \mathbf{g}) + 2\omega (f^{(m-1, \varepsilon_k)} - u^{(m, \varepsilon_k)}) - \begin{cases} (e^{(m, \varepsilon_k)} - c^{(m, \varepsilon_k)}) \nabla \Psi_{\varepsilon_k}, & \text{若 } \Phi_{\varepsilon_k}(u^{(m, \varepsilon_k)}) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \geq 0 \\ (e^{(m, \varepsilon_k)} + c^{(m, \varepsilon_k)}) \nabla \Psi_{\varepsilon_k}, & \text{其它} \end{cases}$$

综上所述, 算法如下:

步 1 令 $\varepsilon_0 = 0, \Delta \varepsilon = 1/n, f^{(0,0)} = \mathbf{g}, Abs$ (绝对误差) = 10^{-4} , 初始化 β, τ .

步 2 若 $\varepsilon_k + \Delta \varepsilon > \varepsilon_n$, 停止. 否则令 $m = 1, ReErr$ (相对误差) = $Abs + 1$, 初始化 $\omega, c^{(1, \varepsilon_k)}, e^{(1, \varepsilon_k)}$.

步 3 使用 Chambolle 投影算法计算 $u^{(m, \varepsilon_k)}$, 其中 $\lambda = \begin{cases} \alpha_{\varepsilon_k} (c^{(m, \varepsilon_k)} - e^{(m, \varepsilon_k)}) / 2\omega, & \text{若 } \Phi_{\varepsilon_k}(f^{(m-1, \varepsilon_k)}) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) \geq 0 \\ -\alpha_{\varepsilon_k} (e^{(m, \varepsilon_k)} + c^{(m, \varepsilon_k)}) / 2\omega, & \text{其它} \end{cases}$.

步 4 利用上述拟牛顿法求解 $f^{(m, \varepsilon_k)}$.

步 5 若 $\Phi_{\varepsilon_k}(f^{(m, \varepsilon_k)}) - \beta \Phi_{\varepsilon_k}(\mathbf{g}) = 0$, 算法停止, 输出 $f^{(m, \varepsilon_k)}$.

步 6 计算 $\text{ReErr} = \|f^{(m, \varepsilon_k)} - f^{(m-1, \varepsilon_k)}\|_2 / \|f^{(m, \varepsilon_k)}\|_2$. 若 $\text{ReErr} > \text{Abs}$, 增大 ω , 令 $m = m + 1$, 利用式(6)更替参数 c, e , 转至步 3.

步 7 $f^{(0, \varepsilon_{k+1})} = f^{(m, \varepsilon_k)}$, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \Delta\varepsilon$, 转至步 2; 算法终止.

注 1 当步 5 成立时, 由引理 2 知 $f^{(m, \varepsilon_k)}$ 为第 ε_k 个近似能量函数的最优值点.

4 收敛性分析

下面我们将说明推出的方法对偶收敛, 即: 对偶函数序列 $H(c, e)$ 收敛于最优值点 \bar{H} .

引理 5^[14] 令 (\bar{c}, \bar{e}) 和 (c^m, e^m) 为两次迭代, s^m 定义如上. 若 $\tilde{H} = H(\bar{c}, \bar{e}) \geq H(c^m, e^m) = H^m$, $\mathbf{d}^m = s^m + \gamma^m \mathbf{d}^{m-1}$, 则:

$$[(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)] \cdot \mathbf{d}^m \geq \tilde{H} - H^m \geq 0.$$

其中

$$\gamma^m = \begin{cases} -\delta^m \mathbf{d}^{m-1} \cdot s^m / \|\mathbf{d}^{m-1}\|_2^2, & \text{若 } \mathbf{d}^{m-1} \cdot s^m < 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$0 \leq \delta^m \leq 2$ (参看文献[14]知, 通常令 $\delta^m = 1.5$).

引理 6^[14] 令 (c^m, e^m) 为任一迭代, s^m, \mathbf{d}^m 定义如上. 若 $\tilde{H} = H(\bar{c}, \bar{e}) \geq H(c^m, e^m) = H^m$ 且对 $\forall m$ 及 δ^m 有 $0 < t^m \leq (\tilde{H} - H^m) / \|\mathbf{d}^m\|_2^2$,

(9)

那么

$$[(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)] \cdot \mathbf{d}^m \geq [(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)] \cdot s^m.$$

定理 1 假设 $\forall (c^m, e^m)$ 不是对偶问题的解, 那么

对于任一对偶解 (\bar{c}, \bar{e}) 有:

$$\|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^{m+1}, e^{m+1})\|_2 \leq \|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)\|_2.$$

证明由式(9)易知

$$t^m \|\mathbf{d}^m\|_2^2 \leq \bar{H} - H^m \leq 2(\bar{H} - H^m),$$

结合引理 5, 引理 6

$$t^m \|\mathbf{d}^m\|_2^2 \leq 2[(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)] \cdot \mathbf{d}^m.$$

那么

$$\begin{aligned} \|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^{m+1}, e^{m+1})\|_2^2 &= \|(\bar{c}, \bar{e}) - t^m \mathbf{d}^m - (c^m, e^m)\|_2^2 \\ &= \|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)\|_2^2 + t^{2m} \|\mathbf{d}^m\|_2^2 - 2t^m \mathbf{d}^m \cdot [(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)], \end{aligned}$$

于是

$$\|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^{m+1}, e^{m+1})\|_2^2 \leq \|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)\|_2^2,$$

即: 序列 $\|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^m, e^m)\|_2$ 单调递减. 证毕.

定理 2 若 (c^m, e^m) 为任一迭代, 令步长 $t^m = (\bar{H} - H^m) / \|\mathbf{d}^m\|_2^2$, 则 $H^m \rightarrow \bar{H}$.

证明

$$\begin{aligned} \|(\bar{c}, \bar{e}) - (c^{m+1}, e^{m+1})\|_2^2 &= (\bar{c} - c^{m+1})^2 + (\bar{e} - e^{m+1})^2 \\ &= (\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2 + t^{2m} \|\mathbf{d}^m\|_2^2 + 2t^m \langle \bar{c} - c^m, \bar{e} - e^m \rangle \cdot \mathbf{d}^m \\ &\leq (\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2 + t^{2m} \|\mathbf{d}^m\|_2^2 + 2t^m (\bar{H} - H^m) \\ &\leq (\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2 - (\bar{H} - H^m)^2 / \|\mathbf{d}^m\|_2^2, \end{aligned}$$

于是可得:

$$\begin{aligned} (\bar{H} - H^m)^2 &= \|\mathbf{d}^m\|_2^2 [(\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2] \\ &\quad - ((\bar{c} - c^{m+1})^2 + (\bar{e} - e^{m+1})^2). \end{aligned}$$

由定理 1 易知数列 $\{(\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2\}$ 单调递减有下界, 则该数列收敛且

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [(\bar{c} - c^m)^2 + (\bar{e} - e^m)^2 - ((\bar{c} - c^{m+1})^2 + (\bar{e} - e^{m+1})^2)] = 0.$$

结合 F 为紧集, $\Phi(\mathbf{f})$ 连续, 数列 $\{\|\mathbf{d}^m\|_2^2\}$ 有界可得 $H^m \rightarrow \bar{H}$, 即 H^m 对偶收敛. 证毕.

注 2 一般地, \bar{H} 为未知量, 同时由于 $L(\mathbf{g}, c^m, e^m)$ 为 H^m 上界, 本文采用如下方式估计步长:

$$t^m = \mu \frac{L(\mathbf{g}, c^m, e^m) - H^m}{\|\mathbf{d}^m\|_2^2}, \quad (10)$$

参数 $\mu \in (0, 1)$ 用来调节 t^m . 更多地, 内点法等许多方法可用来近似求解 H^m 的上界[5, 13].

5 实验

这一部分, 我们将分别以拟合 f 和 Df 为基础给出本文方法与文献[9]中两种方法的相关对比试验结果, 说明本文方法的有效性. 类似文献[9], 测试图像选为 Cameraman (256×256), Lena (512×512), jetplane (512×512) 三个经典测试图片. 所有实验均在 MATLAB2010a, Core(TM) 为 1.66GHz, RAM 为 2GB 环境下完成, 并取 10 次实验结果的平均值.

通过实验, 令文献(10)中参数 $\mu = 0.0001$. $c^{(1, \varepsilon_k)}$ 和 $e^{(1, \varepsilon_k)}$ 分别在区间 $[0.015, 0.025]$ 、 $[0.005, 0.15]$ 中随机产生. 为保持与文献[9]一致, ω 的初始值设定为 1.1, 并在每一步内迭代中以 1.8ω 的速度递增; 5.1 中 Chambolle 方法的步长取为 0.25; 文献[9]中方法的正则参数为 0.015; φ 及 φ_{ε_k} 形式如下:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, \varphi_{\varepsilon_k}(t) = \frac{\lambda t}{1 + \varepsilon_k \lambda t},$$

其中 $\lambda = 0.5$. 退化函数为经过截取且支撑集分别为 7×7 ($\sigma = 1, \beta = 0.23$), 9×9 ($\sigma = 1.5, \beta = 0.21$), 11×11 ($\sigma = 2, \beta = 0.2$) 的二维高斯函数:

$$h(s, t) = \exp\left(\frac{-s^2 - t^2}{2\sigma^2}\right), (-3 \leq s, t \leq 3).$$

加性噪声选用均值为 0, 标准差分别为 0.01, 0.05, 0.1 和 0.2 的高斯噪声.

测试中, CPU 运行时间 (seconds) 度量算法效率, ReErr、信噪比 SNR(db)、峰值信噪比 PSNR(db):

$$\text{ReErr} = \frac{\|f^{(m, \varepsilon_k)} - f^{(m-1, \varepsilon_k)}\|_2}{\|f^{(m, \varepsilon_k)}\|_2},$$

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{\|\hat{f}\|_2}{\|f^{(m, \varepsilon_k)} - f\|_2} \right),$$

$$\text{PSNR} = -20 \log_{10} \left(\frac{\|f^{(m, \varepsilon_k)} - f\|_2}{l_1 l_2} \right)$$

度量图像恢复

5.1 拟合 f

下面将给出当对 f 进行拟合时本文与文献[9]中

算法的对比试验结果. 首先我们用两个例子说明本文推出的方法可以有效提高图像恢复质量. 图 1(a), 图 2(a) 表示原始图像, 图 1(b), 图 2(b) 表示观测图像. 图 1(c) 为文献[9]恢复的 Cameraman 图像, 图 1(d) 为本文恢复的 Cameraman 图像, 其中退化函数支撑集为 9×9 , 高斯噪声标准差为 0.05. 图 2(c) 为文献[9]恢复的 jetplane 图像, 图 2(d) 为本文恢复的 jetplane 图像, 其中退化函数支撑集为 9×9 , 高斯噪声标准差为 0.2. 针对不同的条件, 更多的恢复结果摘要在表 1, 表 2 中.

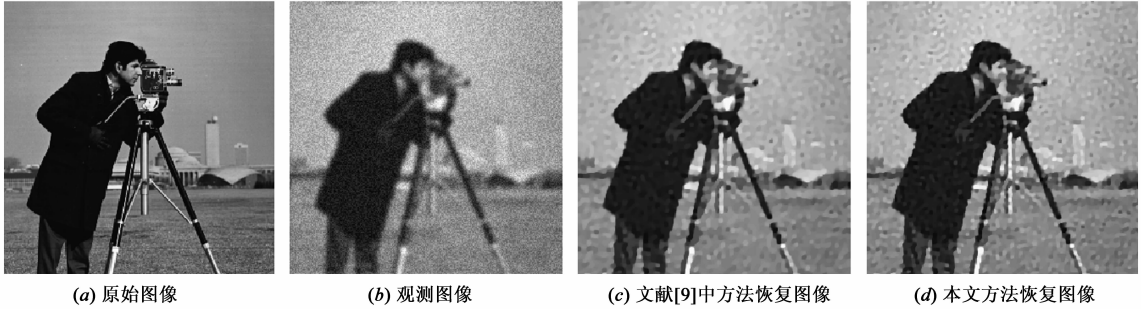


图1 退化函数支撑集为 9×9 , 高斯噪声标准差为0.05时Cameraman图像恢复效果对比图

表1 Cameraman 图像恢复结果

Noise	Blur	SNR		PSNR		CPU		ReErr	
		文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文
0.01	7	19.96	19.98	25.54	25.54	8.70	7.62	2.54e-005	8.92e-006
	9	18.54	18.57	24.13	24.22	11.64	9.99	2.46e-005	8.84e-006
	11	17.52	17.50	23.11	23.33	14.01	11.99	2.43e-005	8.64e-006
0.05	7	19.77	19.83	25.35	25.37	9.91	7.93	3.05e-005	8.84e-006
	9	18.68	18.72	24.36	24.45	12.42	10.09	2.81e-005	8.54e-006
	11	17.46	17.47	23.05	23.16	14.66	10.17	2.63e-005	8.62e-006
0.1	7	18.95	19.01	24.73	24.70	8.86	7.07	2.97e-005	8.64e-006
	9	18.06	18.19	23.64	23.88	12.70	9.00	2.93e-005	8.59e-006
	11	17.23	17.24	22.81	22.81	16.02	14.03	2.84e-005	8.44e-006
0.2	7	16.02	16.17	21.60	21.66	15.10	12.16	2.70e-005	8.54e-006
	9	16.19	16.18	21.77	21.86	14.73	12.62	2.77e-005	8.42e-006
	11	15.17	15.21	20.76	20.83	14.73	11.60	2.92e-005	8.56e-006

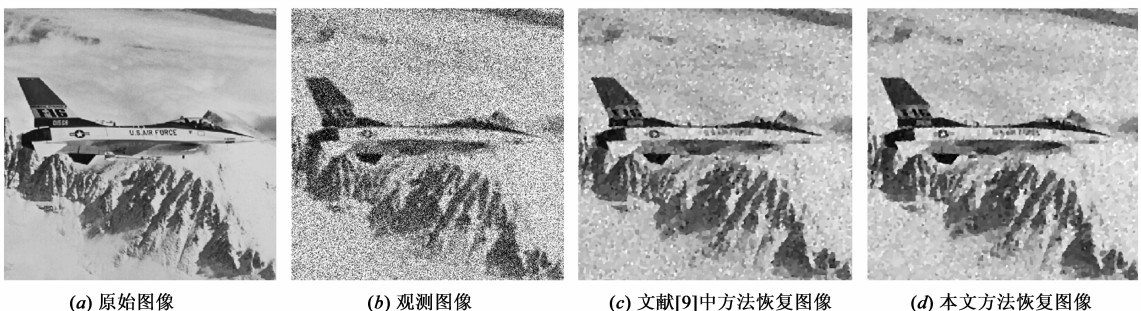


图2 退化函数支撑集为 9×9 , 高斯噪声标准差为0.2时jetplane图像恢复效果对比图

表 2 jetplane 图像恢复结果

Noise	Blur	SNR		PSNR		CPU		ReErr	
		文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文
0.01	7	27.68	27.76	30.52	30.54	46.88	38.84	1.93e-005	7.84e-006
	9	25.73	25.73	28.57	28.65	59.25	50.99	1.92e-005	7.44e-006
	11	24.30	24.31	27.14	27.19	66.11	57.99	1.87e-005	7.54e-006
0.05	7	27.23	27.20	30.07	30.13	47.11	38.93	2.22e-005	7.99e-006
	9	25.49	25.51	28.33	28.33	59.25	49.06	2.10e-005	8.12e-006
	11	24.16	24.27	27.00	27.09	69.00	58.17	2.01e-005	8.22e-006
0.1	7	25.71	25.80	28.55	28.67	47.92	37.07	2.19e-005	8.21e-006
	9	24.69	24.81	27.53	27.78	58.80	48.03	2.11e-005	8.31e-006
	11	23.64	23.68	26.48	26.56	67.16	58.03	2.08e-005	8.01e-006
0.2	7	21.54	21.67	24.28	24.26	71.06	57.16	2.00e-005	8.34e-006
	9	21.47	21.55	24.01	24.19	66.86	55.62	2.04e-005	8.36e-006
	11	19.42	19.42	22.26	22.33	69.48	57.60	2.18e-005	8.22e-006

图 1,图 2 表明本文方法图像恢复质量较文献[9]有较为明显的提高. 针对不同高斯噪声及退化函数支撑集,表 1,表 2 指出在绝大部分情况下 SNR、PSNR 值高于文献[9]中结果,CPU 运行时间及 ReErr 在任一情况得到明显改进. 因此当对 f 进行拟合时,推出的方法具有优良的恢复性能.

5.2 拟合 Df .

下面将给出当对 Df 进行拟合时本文与文献[9]中算法的对比实验结果. 特别地,如第 2 部分所述,为简单

起见,具体算法本文略. 类似 5.1, 首先利用两个例子说明本文方法的恢复效果. 图 3(a),图 4(a)表示原始图像,图 3(b),图 4(b)表示观测图像. 图 3(c)为文献[9]恢复的 Lena 图像,图 3(d)为本文恢复的 Lena 图像,其中退化函数支撑集为 7×7 ,高斯噪声标准差为 0.1. 图 4(c)为文献[9]恢复的 jetplane 图像,图 4(d)为本文恢复的 jetplane 图像,其中退化函数支撑集为 11×11 ,高斯噪声标准差为 0.2. 更多条件下的恢复结果将在表 3,表 4 中列出.

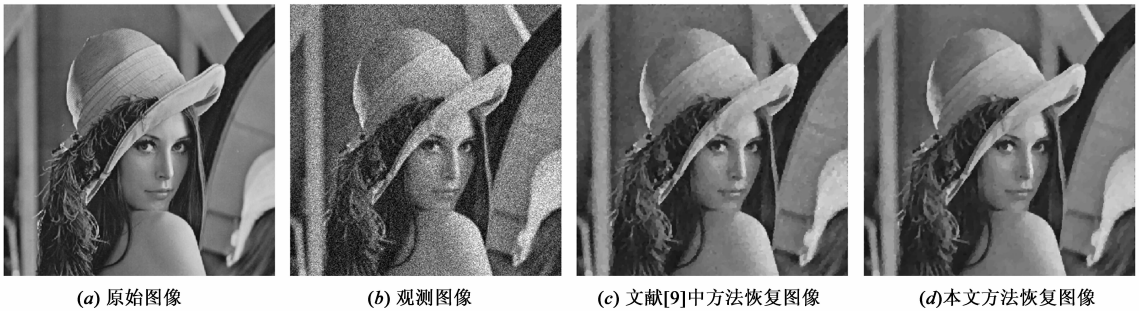
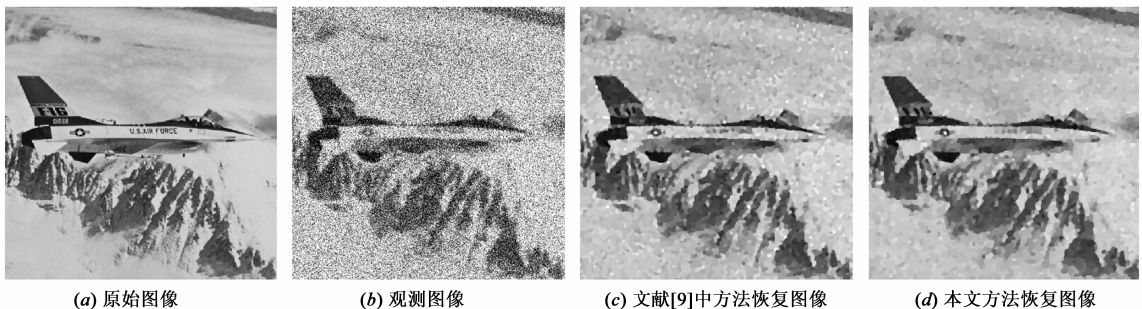
图 3 退化函数支撑集为 7×7 ,高斯噪声标准差为 0.1 时 Lena 图像恢复效果对比图图 4 退化函数支撑集为 11×11 ,高斯噪声标准差为 0.2 时 jetplane 图像恢复效果对比图

表 3 Lena 图像恢复结果

Noise	Blur	SNR		PSNR		CPU		ReErr	
		文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文
0.01	7	25.29	25.28	30.94	30.94	11.36	9.84	2.11e-005	8.43e-006
	9	23.75	23.77	29.40	29.42	12.56	10.99	2.17e-005	8.47e-006
	11	22.59	22.60	28.24	28.29	14.12	10.99	2.50e-005	8.14e-006
0.05	7	24.71	24.83	30.36	30.37	10.95	8.93	1.60e-005	7.89e-006
	9	23.37	23.51	29.03	29.07	13.18	10.09	1.78e-005	8.08e-006
	11	22.34	22.37	28.00	28.16	13.74	10.17	1.92e-005	8.23e-006
0.1	7	23.13	23.13	28.79	28.83	11.86	10.07	1.30e-005	7.49e-006
	9	22.44	22.51	28.10	28.18	13.81	11.00	1.43e-005	7.69e-006
	11	21.78	21.88	27.44	27.46	15.02	13.73	1.50e-005	7.89e-006
0.2	7	19.23	19.27	24.89	24.89	17.82	15.16	1.47e-005	8.21e-006
	9	18.80	18.86	24.46	24.46	17.83	15.62	1.43e-005	7.95e-006
	11	16.86	16.84	22.52	22.53	21.25	18.60	1.53e-005	7.99e-006

表 4 jetplane 图像恢复结果

Noise	Blur	SNR		PSNR		CPU		ReErr	
		文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文	文献[9]	本文
0.01	7	27.77	27.76	30.61	30.64	9.48	8.84	2.68e-005	8.21e-006
	9	25.75	25.77	28.59	28.58	10.75	8.99	2.53e-005	8.15e-006
	11	24.28	24.40	27.12	27.19	11.42	9.99	2.65e-005	8.65e-006
0.05	7	27.28	27.26	30.12	30.12	10.44	8.93	1.49e-005	7.65e-006
	9	25.49	25.51	28.33	28.37	11.65	9.09	1.68e-005	7.44e-006
	11	24.12	24.17	26.96	26.96	11.95	9.17	1.94e-005	7.42e-006
0.1	7	25.74	25.90	28.56	28.64	11.48	10.07	1.01e-005	7.41e-006
	9	24.74	24.81	27.58	27.58	12.50	11.00	1.10e-005	7.66e-006
	11	23.63	23.88	26.46	26.55	13.85	11.03	1.29e-005	7.87e-006
0.2	7	21.44	21.47	24.28	24.31	15.90	14.16	1.07e-005	7.21e-006
	9	21.19	21.26	24.03	24.06	16.13	14.72	1.11e-005	7.41e-006
	11	19.62	19.61	22.46	22.53	18.58	17.75	1.13e-005	7.47e-006

类似 5.1, 图 3, 图 4 表明当对 Df 进行拟合时本文方法的图像恢复质量较文献[9]有较为明显的提高. 表 3, 表 4 指出针对不同高斯噪声及退化函数支撑集, 在绝大部分情况下 SNR、PSNR 值高于文献[9]中结果, CPU 运行时间及 ReErr 在任一情况下均被有效改进.

6 总结

本文利用转换原始问题为等式约束优化问题推出了一种基于 GNC 和增广拉格朗日对偶的组合图像恢复方法. 以拟合 f 为例给出了具体算法及其收敛性证明. 该方法不仅可以获得有效的初始值, 同时不要求问题具有凸性和光滑性. 更多地, 一个自适应能量函数通过

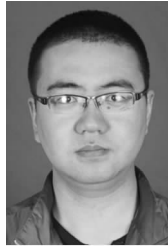
对偶迭代而得到. 第 5 部分给出了分别对 f 和 Df 拟合情形下的对比试验, 结果表明本文推出的方法针对具有边界整齐的图像具有较高的恢复性能. 将来我们计划利用 GNC、拉格朗日对偶等方法的改进形式^[13, 18, 19]提高本文组合方法的恢复性能.

参考文献

- [1] R C Gonzalez, R E Woods. Digital Image Processing[M]. 2nd ed, London: Prentice Hall, 2002.
- [2] 刘红毅, 韦志辉, 张峥嵘. 自适应非局部 patch 正则化图像恢复[J]. 电子学报, 2012, 40(3): 513-517.
Liu Hong-yi, Wei Zhi-hui, Zhang Zheng-rong. Adaptive nonlo-

- cal patch regularization for image restoration[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3): 513 – 517. (in Chinese)
- [3] 孙玉宝, 韦志辉, 吴敏, 肖亮, 费选. 稀疏性正则化的图像泊松去噪算法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 285 – 290.
Sun Yu-bao, Wei Zhi-hui, Wu Min, Xiao Liang, Fei Xuan. Image poisson denoising using sparse representations [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 285 – 290. (in Chinese)
- [4] A M Bruckstein, D L Donoho, M Elad. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images[J]. SIAM Review, 2009, 51(1): 34 – 81.
- [5] F H Clarke. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: John Wiley and Sons, 1983.
- [6] J V Burke, D Henrion, A S Lewis, M L Overton. Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2006, 51(11): 1760 – 1769.
- [7] L Bedini, I Gerace, A Tonazzini. A GNC algorithm for constrained image reconstruction with continuous-value line process[J]. Pattern Recognition Letters, 1994, 15(9): 907 – 918.
- [8] M Nikolova. Markovian reconstruction using a GNC approach [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 1999, 8(9): 1204 – 1220.
- [9] M Nikolova, K N Michael, C P Tam. Fast nonconvex nonsmooth minimization methods for image restoration and reconstruction [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2010, 19(12): 3073 – 3088.
- [10] R N Gasimov. Augmented Lagrangian duality and nondifferentiable optimization methods in nonconvex programming[J]. Journal of Global Optimization, 2002, 24(2): 187 – 203.
- [11] R S Burachik, C Y Kaya. An update rule and a convergence result for a penalty function method[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2007, 3(2): 381 – 398.
- [12] R T Rockafellar. Lagrange multipliers and optimality [J]. SIAM Review, 1993, 35(2): 183 – 238.
- [13] Sun Wen-yu, Yuan Ya-xiang. Optimization Theory and Method: Nonlinear Programming[M]. Springer, 2006.
- [14] P M Camerini, L Fratta, F Maffioli. On improving relaxation methods by modified gradient techniques [J]. Mathematical Programming Study, 1975, 3(3): 26 – 34.
- [15] M Held, R M Karp. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II [J]. Mathematical Programming, 1971, 1(1): 6 – 25.
- [16] A Chambolle. An algorithm for total variation minimization and Applications [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1 – 2): 89 – 97.
- [17] K N Michael, Qi Li-qun, Yang Yu-fei, Huang Yu-mei. On semismooth Newton's methods for total variation minimization [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 27(3): 265 – 276.
- [18] 易翔, 王蔚然. 一种概率自适应图像去噪模型 [J]. 电子学报, 2005, 33(1): 63 – 66.
Yi Xiang, Wang Wei-ran, A probability model for adaptive image denoising [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(1): 63 – 66. (in Chinese)
- [19] R Buil, M A Piera, P B Luh. Improvement of Lagrangian relaxation convergence for production scheduling [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2012, 9(1): 137 – 147.

作者简介



刘晓光(通讯作者) 男, 1985年生, 2008年获陕西师范大学学士学位, 同年于陕西师范大学攻读博士研究生(硕博连读), 主要研究领域为最优化理论、数值线性代数及其在图像处理中的应用。

E-mail: liuxiaoguang_lxg@163.com



高兴宝 男, 1966年生, 博士, 教授(博士生导师), 分别于1988年、1991年获陕西师范大学学士、硕士学位, 2000年获西安电子科技大学博士学位, 多次受邀到香港浸会大学等高校访问。主要研究领域为最优化理论、神经网络及其在图像处理中的应用。

E-mail: xinbaog@snu.edu.cn